ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА **Н. БЕЙСЕН**

1 ЛЕКЦИЯ

Кіріспе. Дененің кеңістіктегі орнын анықтау. Жалпылама координаттар. Координаттық беттер, сызықтар. Ламэ коэффициенттері. Координаттардың ортогональды жүйесі. Нүкте жылдамдығының қисық сызықты координаттарда жазылуы

Теориялық механика – механикалық қозғалыс пен материалдық денелердің өзара механикалық әсерлесуінің ортақ заңдылықтары жайындағы ғылым болып табылады.

Бұл курс теориялық физиканы оқытудың маңызды және алғашқы құрамдас бөлігі болып табылады, өйткені ол көптеген физикалық құбылыстарды, соның ішінде денелердің қозғалысын, сұйықтықтар мен газдардың механикасын және өріс теориясын жете түсінуге негіз болады.

Сондай-ақ, бұл курста Ньютон заңдары, ең аз әсер принципі, энергияның сақталу заңы, импульстің сақталу заңы және берілген кеңістістіктің изотроптық қасиетімен түсіндірілетін импульс моментінің сақталу заңы сияқты механиканың іргелі заңдары арнайы қарастырылады. Сонымен қатар, бұл заңдардың нүктелік бөлшектер, қатты денелер және бөлшектер жүйелері сияқты әртүрлі жүйелерге қалай қолданылатыны баяндалады. Ең маңызды қадам болып механикада қолданылатын математикалық әдістердің, соның ішінде дифференциалдық теңдеулер мен вариацияларды есептеулердің кең қолданылатыны болып табылады.

Механиканың ең негізгі зерттеу объектісі – материалдық бөлшек. Қарастырылып отырған жағдайда өлшемдері мен пішінін ескермеуге болатын денені материалдық бөлшек деп атаймыз. Нүктенің өлшемі мен пішіні жоқ болғандықтан материалдық бөлшек орнына *материалдық нүкте* деген атау да қолданылады.

Классикалық механикада (негізін салушылар – Галилей, Ньютон) денелердің қозғалыс күйін өзгертетін сыртқы әсер мен өзара механикалық әсерлесуді сипаттау үшін *күш* ұғымы енгізіледі. Механикалық әсер арқылы дене қозғалысқа келеді (қозғалыс күйі өзгереді) немесе деформацияға ұшырайды (осы денелерді құрайтын бөлшектердің өзара орналасуы өзгереді). Сонымен, күш материалдық денелердің өзара әрекеттесуінің өлшемі болып табылады.

Дененің қозғалысын тудыратын күш – сыртқы фактор болып табылады. Сонымен қатар, дененің қозғалысы оның қозғалыс күйін өзгертуге қарсыласу қабілетін сипаттайтын ішкі фактор – инерттілік дәрежесіне де тәуелді болады. Себебі, дененің инерттілігі неғұрлым жоғары болса, соғұрлым сыртқы күштің әсерінен болатын қозғалысы баяу болады (немесе керісінше) деуге болады. Материалдық дененің инерттілігінің өлшемі ретінде заттың мөлшеріне тәуелді *масса* деген шаманы алады.

Сонымен, классикалық механиканың негізін қалаушы ұғымдарға: қозғалыстағы материя (материалдық денелер), қозғалыстағы материяның өмір сүру формасы болып табылатын *кеңістік* пен *уақыт*, материалдық дененің инерттілік өлшемі ретінде – *масса* және денелердің арасындағы механикалық әрекеттесудің өлшемі – *күш* жатады.

Механиканы *кинематика* және *кинетика* деп бөлуге болады. Кинематикада дененің қозғалысы тек геометриялық тұрғыдан қарастырылады, яғни қозғалысқа себеп болатын әсер немесе күш ескерілмейді.

Кинетика материалдық денелердің қозғалысын әсер етуші күшті ескере отырып қарастырады және статика (күштің әсерінен дененің тепе-теңдікте болуы) және динамика (күштің әсерінен болатын дененің қозғалысы) болып екіге бөлінеді. Динамикада денеге әсер еткен күш арқылы осы дененің қозғалысын табу немесе керісінше, берілген қозғалыс арқылы ол денеге әсер етуші күштерді табу сияқты теориялық механиканың есептері қарастырылады.

Кинематика дененің қозғалысын тек геометриялық тұрғыдан, яғни қозғалысқа себеп болатын әсер немесе күшті ескермей қарастыратын болса, оның геометриядан айырмашылығы бар ма? Шынында да, кинематиканың геометриядан айырмашылығы – мұнда денелердің кеңістіктегі орнын ауыстыруын қарастырғанда орын ауыстыруға кеткен уақытын да ескеру керек болады. Сондықтан кинематиканы кейде, төртінші өлшемі уақыт болып табылатын, «*төрт өлшемді геометрия*» деп те атайды.

Яғни, теориялық механика ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында, соның ішінде физика, техника, астрономия, механика, биология және медицинада кеңінен қолданылатын іргелі ғылым болып табылатыны анық.

Дененің кеңістіктегі орнын анықтау. Жалпылама координаттар. Координаттық беттер, сызықтар. Ламэ коэффициенттері. Координаттардың ортогональды жүйесі

Координаттар жүйесі - механикалық жүйенің орнын сипаттау үшін қолданылатын жүйе. Ол координаталық осьтердің бағыттарын көрсететін осьтер жүйесін және координаталар басы деп аталатын нүктені таңдаудан тұрады. Қарастырылып отырған есептің симметриясына қарай декарттық, сфералық, цилиндрлік, параболалық, эллипстік және т.б. координаттар жүйелерін қолдану ыңғайлы. Сонымен қатар үш өлшемді кеңістікте есептер шығару кезінде декарттық координаттар жүйесінен көбінесе қисықсызықты координаттар жүйелеріне көшіп отырамыз. Үш өлшемді эвклидті кеңістікте тікбұрышты координаталар (x, y, z) жүйесімен бірге бастапқы нүктелері ортақ қисық сызықты (q_1, q_2, q_3) тәуелсіз айнымалылардан тұратын координаталар жүйесін де енгіземіз. Яғни декарттық координаталар жүйесімен қоса қисықсызықты координаттар жүйесінің жиынтығын q_i *жалпылама координаттар* жүйесі деп атайды. q_i координатасының уақыт бойынша туындысы $\dot{q}_i$ *жалпылама жылдамдық* деген ұғымды береді.

Осы жүйелердің координаттарының арасындағы өзара байланысы:

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases} \tag{1}$$

Осы теңдеулерді декарттық координаттар жүйесінде жалпылама координаттар жүйесі арқылы шешу үшін (1) түрлендірулердің якобианы нольден өзгеше болу керек:

$$I\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right) \neq 0 \tag{2}$$

Ол үшін (1) қасиеті мынадай болу керек

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \tag{3}$$

яғни аргументтері бойынша шешілу керек.

Сонымен, кеңістікте берілген кез келген нүкте не (x, y, z) немесе (q_1, q_2, q_3) координаталарымен анықталады. Егер координаттар жүйесінің басынан осы нүктеге дейін радиус вектор жүргізсек:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{4}$$

немесе қысқаша былай да жазуға болады:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \tag{5}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координаттардың өсу бағытын көрсететін бірлік векторлар.

Жалпылама координаттар жүйесі үшін де радиус векторды сәйкес координаталар арқылы жазуға болады:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{1}$$

Үш координаттың біреуі тұрақты $q_i = c_i$, $i = 1,2,3$ болғанда қалған екеуі айнымалы болып қалады да, *координаттық бетті* сызады. Декарттық координат жүйесі жағдайында бұл координаттық бет жазықтық болып табылады. Екі координаттық беттердің қиылысуынан координаттық сызықтар пайда болады. Оларды кейде сәйкесінше q_1, q_2, q_3 сызықтар деп атайды. Мысалы, декарт координаттар жүйесінде ол сызықтар түзу болады да, түзу сызықты координаттар жүйесі деп аталады. Ал басқа координаттар жүйелерінде ол сызықтар қисық сызықты болып, олар *қисық сызықты координаттар* деп аталады.

Берілген координаттар жүйесінің осьтерінің оң бағытын көрсететін бірлік векторлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ енгіземіз. Ал бір-біріне шексіз жақын орналасқан екі нүктенің арақашықтығының квадратын көрсетсек:

$$ds^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} \right) \cdot dq_m \cdot dq_n \cdot (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) \tag{7}$$

мұндағы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = h_m \cdot \vec{e}_m, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} = h_n \cdot \vec{e}_n \tag{8}$$

себебі $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}$ – q_m координаттық сызығы жанамасымен бағытталған. $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \right| = h_m$ дербес туындысының модулі q_m координатасының өлшем бірлігіне сәйкес келетін сызықты элементтердің мөлшері болып табылады және біз оны *Ламэ коэффициенттері* деп атаймыз.

(8) ні (7) ға қойып, мынаны аламыз

$$ds^2 = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} h_m h_n (\vec{e}_m \vec{e}_n) \cdot dq_m \cdot dq_n. \tag{9}$$

Координаттық сызықтары өзара ортогональ болып келетін (яғни кез келген нүктеде координаттық сызықтар өзара перпендикуляр қиылысатын) координаттық жүйелерді ортогоналды деп атайды. Олар мына шартты қанағаттандыратын болуы керек:

$$(\vec{e}_m \vec{e}_n) = \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} \delta = 1, \text{ егер } m = n; \\ \delta = 0, \text{ егер } m \neq n. \end{cases} \tag{10}$$

сондықтан

$$ds^2 = \sum_{m=1}^{3} h_m^2 dq_m^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 . \tag{11}$$

Яғни ортогоналды координаттар жүйесінде ds^2 өрнегіне координаттардың дифференциалдарының квадраттары ғана енеді.

Осындай жүйеде көлемнің шексіз аз элементі:

$$dV = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3. \tag{12}$$

Мысал ретінде айтатын болсақ, біз білетін декарттық, сфералық, цилиндрлік координаттар жүйелері ортогоналды координаттар жүйелеріне жатады.

(8) және (10) ескере отырып:

$$h_m = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m} \right)^2} \,. \qquad (13)$$

Осы арқылы, егер координаттық түрлендірулері белгілі болса, Ламэ коффициенттерін кез келген координаттық жүйеде анықтай аламыз.

Нүкте жылдамдығының қисық сызықты координаттарда жазылуы

Нүкте жазықтықта қозғалса оның қозғалыс заңын полярлық координаттарда мына теңдеулер арқылы жаза аламыз:

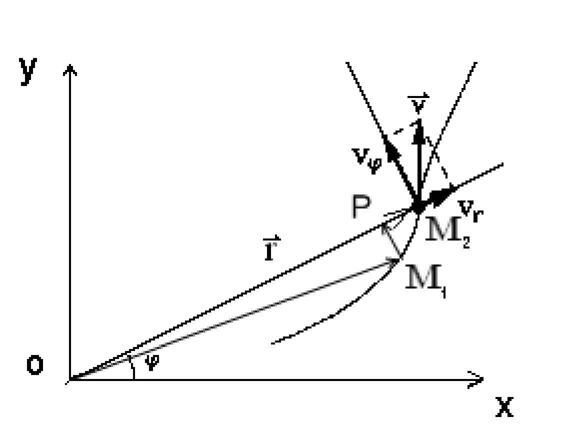
$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t)\,. \qquad (14)$$

Ал жылдамдықты құраушылары арқылы жазатын болсақ:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi\,. \qquad (15)$$

Мұндағы: $v_r = \dot{r}$; $v_\varphi = r\dot{\varphi}$. Жылдамдықтың модулі:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} \text{ немесе } v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\,. \qquad (16)$$



Сурет 6.

Осындай нәтижені dS доғаның элементі арқылы да алуға болады. Ол үшін (6 -суреттегі) $\Delta M_1 M_2 P$ шексіз аз қисықсызықты үшбұрышты қарастырамыз. PM_1 – радиусы $\vec{r}$ -ға тең шеңбердің доғасы берілген. Пифагор теоремасын қолдансақ:

$$(M_1 M_2)^2 = (PM_2)^2 + (M_1 P)^2 \qquad (17)$$

$M_1 M_2 = dS$, $PM_2 = dr$ болған жағдайда:

$$M_1P = rd\varphi. \tag{18}$$

ендеше:

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{19}$$

Осы өрнекті dt^2-ға бөлетін болсақ:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = v^2. \tag{20}$$

немесе

$$v^2 = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{21}$$

Осыған ұқсас нүкте жылдамдығының цилиндрлік және сфералық координаттарда жазылуын көрсете аламыз.

$$v^2 = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \tag{22}$$

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(rsin\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \\ = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Теориялық механика нені зерттейді?
2. Механиканың қандай салалары бар?
3. Классикалық механиканың негізін салушылар кімдер болып саналады?
4. Теориялық механиканың қолданылу аясын айтыңыз.
5. Теориялық механикада жалпылама координаттар жүйесі дегеніміз не?
6. Координаталық беттер дегеніміз не?
7. Координаталық сызықтар дегеніміз не?
8. Ортогоналды координаттық жүйелер дегеніміз не?
9. Ламэ коффициенттері дегеніміз не?
10. Инерциялық координаталар жүйесі дегеніміз не?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5